Лингвистическая переменная

Обычная переменная

Обычная (не нечёткая) переменная
- это тройка $(X,U,R(X;u))$, где
X – название переменной;
U – универсальное множество;
u – общее название элементов U;
x – общее название значений переменной X;
$R(X;u)$ – подмножество множества U, представляющее собой ограничение на значения u, обусловленные X.

Уравнение назначения:

$$x=u:R(X),$$

$$x=u,\ u\in R(X)$$

переменной x назначено значение u с учётом ограничения R.

Обычная составная переменная

Упорядоченный набор $X=(X_1,\ldots,X_n)$, где X_i – обычная переменная, называют **составной переменной**.

Причём:

$U= U_1\times\ldots\times U_n$ – универсальное множество;

u_i – общее название элементов U_i;

R – n-арное отношение в U, определённое функцией принадлежности $\mu_R(u_1,\ldots,u_n)$:

$$\mu_R(u_1,\ldots,u_n)=\begin{cases}1, & \text{если } (u_1,\ldots,u_n)\in R\\ 0, & \text{если } (u_1,\ldots,u_n)\notin R\end{cases}$$

Уравнение назначения:

$$(x_1,\ldots,x_n)=(u_1,\ldots,u_n):R(X_1,\ldots,X_n),$$

$$x_i=u_i,\ (u_1,\ldots,u_n)\in R(X_1,\ldots,X_n)$$

Обычная переменная - возраст

Пример:
X – возраст
U = 1,2,3,…
R(X;u) = {1,2,3,…,100}

X_1:= возраст отца
X_2:= возраст сына

U_1:= U_2= {1,2,3,…,100}

R(X_1 , X_2):

$$\mu_R(u_1,u_2)=\begin{cases}1, & \text{если } 21\le u_1\le 100,\ u_1\ge u_2+20\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Маргинальные ограничения

Пусть
$q=i_1,\dots,i_l$ – набор индексов
$q'=j_1,\dots,j_m$ – дополнение этого набора

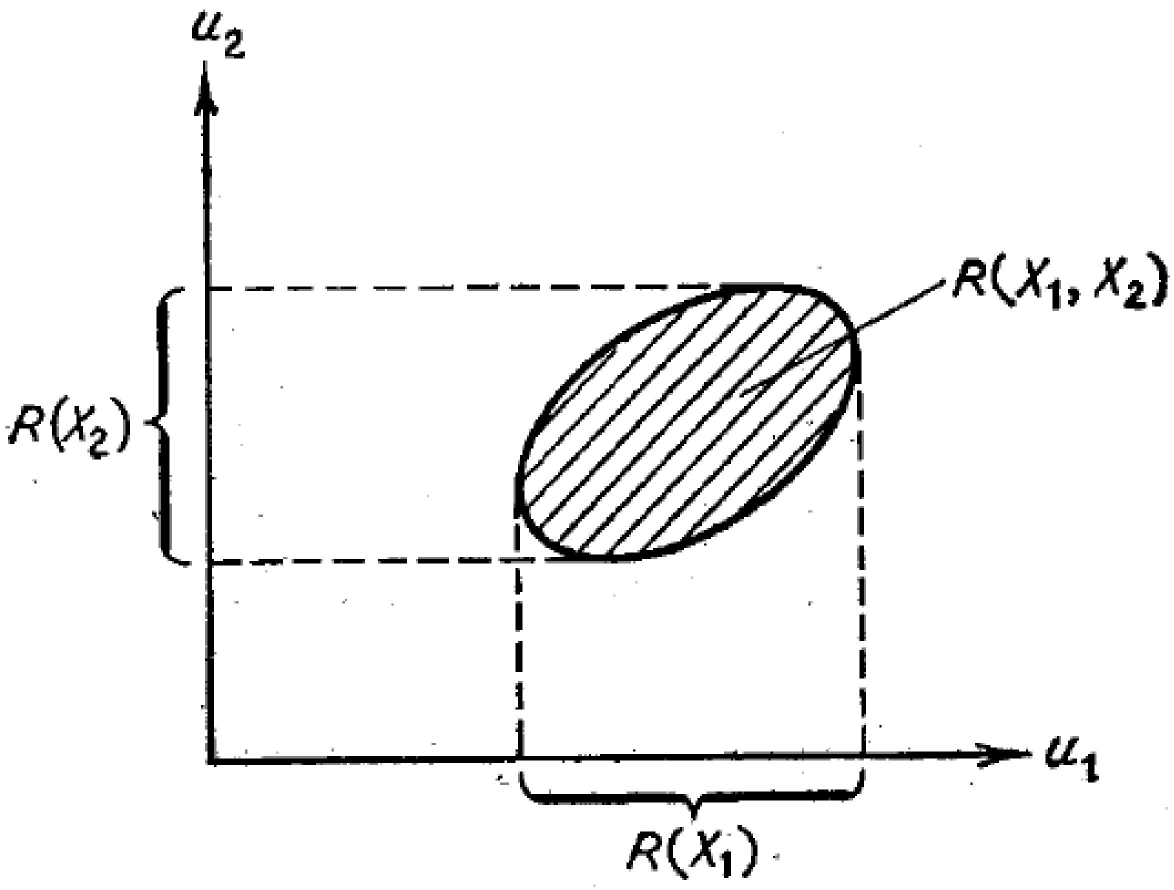
$u_{(q)}= (u_{i1},\dots,u_{il})$, $u_{(q')}= (u_{j1},\dots,u_{jm})$

$R(X_{(q)})=R(X_{i1},\dots,X_{il})$ – **маргинальное ограничение**, если это минимальное ограничение, которое удовлетворяет свойству
$(u_1,\dots,u_n)\in R(X_1,\dots,X_n) \Rightarrow (u_{i1},\dots,u_{il})\in R(X_{i1},\dots,X_{il})$

$$\mu_{R(X_{(q)})}(u_{(q)}) = \sup_{u_{(q')}} \mu_{R(X)}(u)$$

$R(X_{(q)})=\mathrm{Proj}R(X_1,\dots,X_n)$ на $U_{i1} \times \dots \times U_{il}$

Маргинальные ограничения



Маргинальные отношения $R(X_1)$, $R(X_2)$, индуцированные отношением $R(X_1, X_2)$

Взаимодействующие переменные

Переменные $X_1,\ldots,X_n$ называют **невзаимодействующими при ограничении** $R(X_1,\ldots,X_n)$ тогда и только тогда, когда *R сепарабельно*:

$$R(X_1,\ldots,X_n)=R(X_1) \times \ldots \times R(X_n),$$

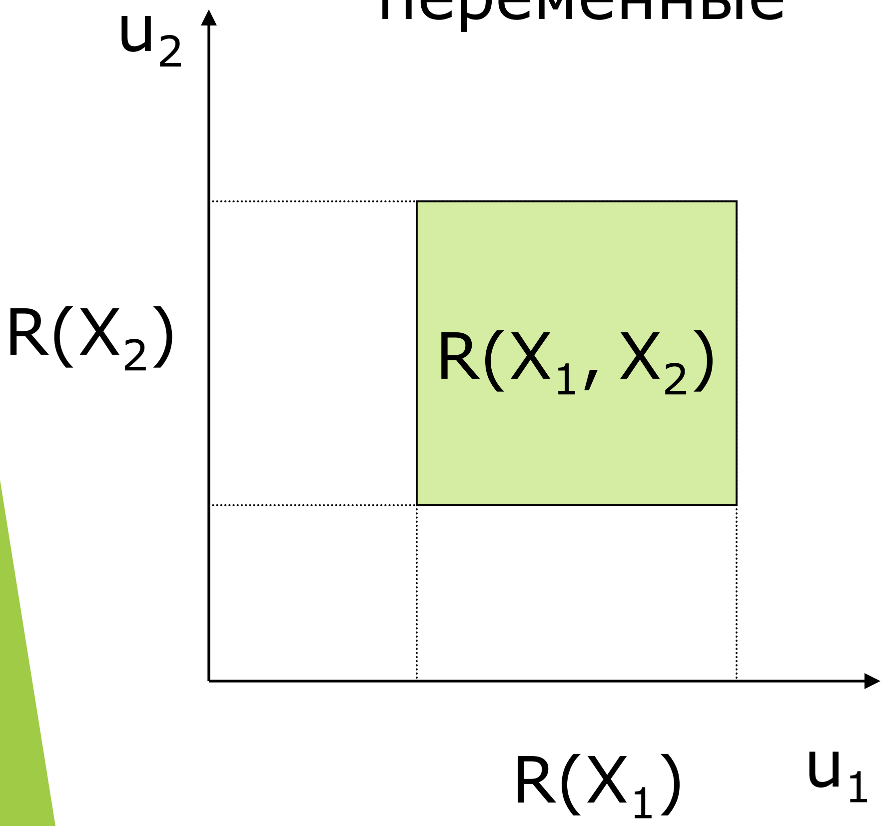
где

$$R(X_i)=\mathrm{Proj}R(X_1,\ldots,X_n) \text{ на } U_i$$

Иначе эти переменные называют **взаимодействующими**.

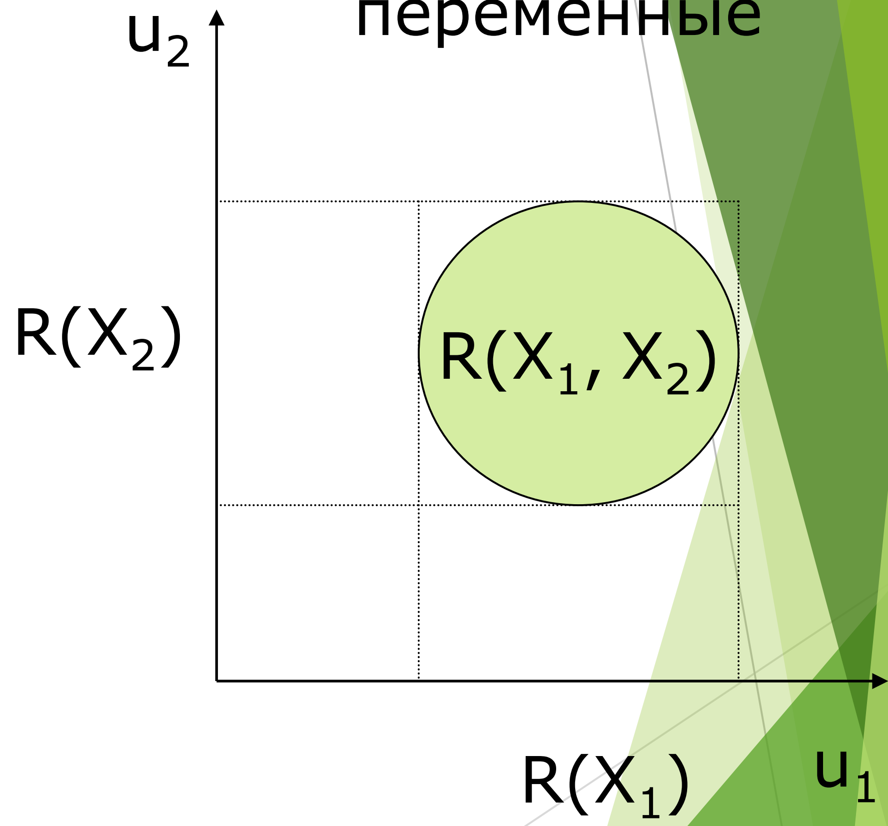
Взаимодействующие переменные

Невзаимодействующие переменные



$$R(X_1,X_2)=R(X_1) \times R(X_n)$$

Взаимодействующие переменные



$$R(X_1,X_2)\subset R(X_1) \times R(X_n)$$

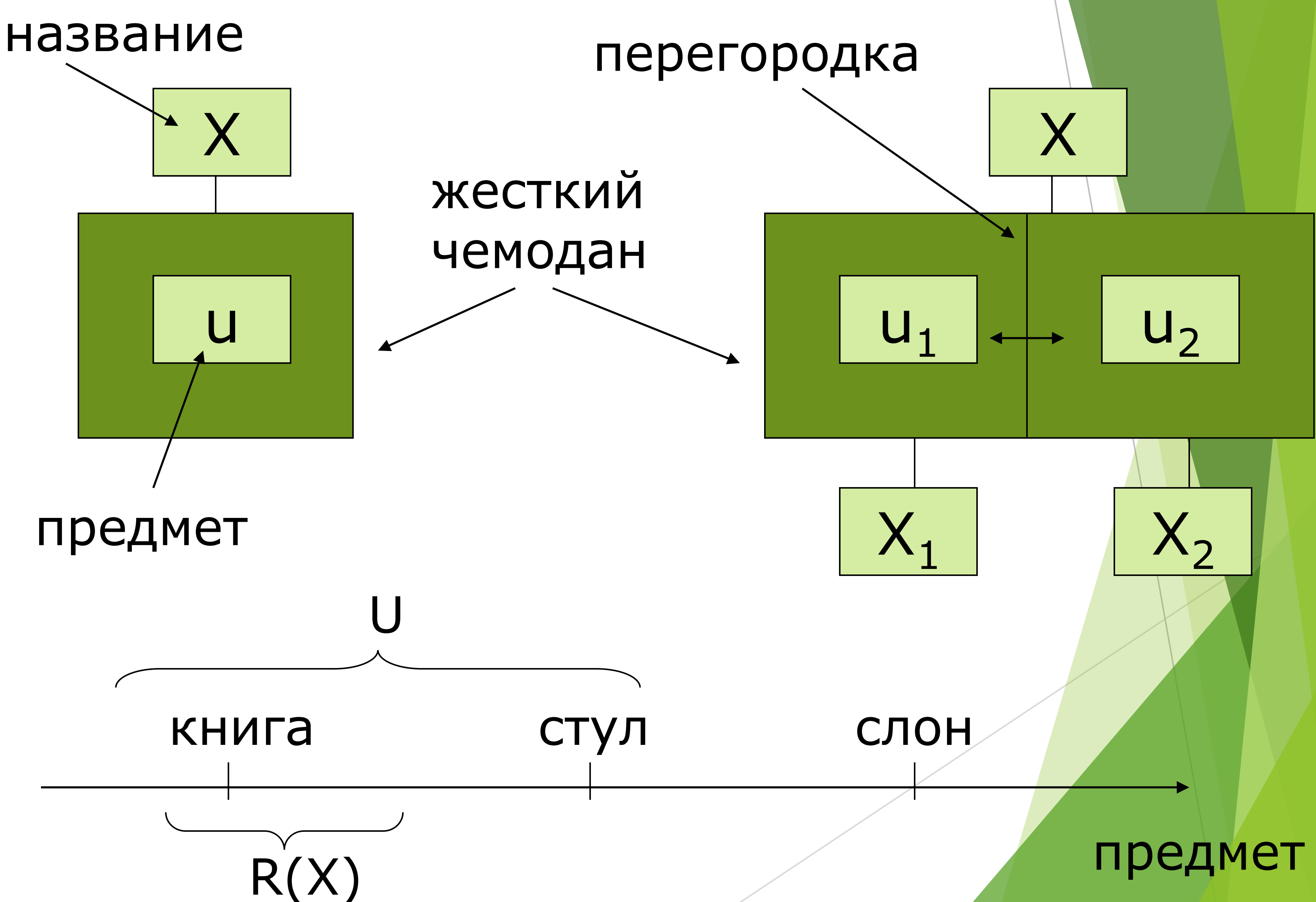
Обычная переменная - аналогия

Чемодан
X – бирка на чемодане
U – предметы, умещающиеся в чемодан
R(X) – список предметов, обычно помещаемых в чемодане.

Уравнение назначения:
x=u:R(X), - предмет u, находящийся в списке R(X), помещён в чемодан X.

Составная переменная $X_1,\ldots,X_n$ – чемодан с n отделениями. Если переменные не взаимодействующие, то стенки между отделениями неподвижны.

Обычная переменная - аналогия



Нечёткая переменная (Л.Заде)

Нечёткая переменная - это тройка (X,U,R(X;u)), где:
X – название переменной;
U – универсальное множество;
u – общее название элементов U;
R(X;u) – <u>нечёткое</u> ограничение на значения u, обусловленные X

Уравнение назначения:

$$x=u:R(X),$$

$$x=u,\ u \in R(X)$$

переменной x назначено значение u с учётом ограничения R.

Совместимость значения:

$$c(u)=\mu_{R(X)}(u)$$

Нечёткая переменная (С.Намиас)

Пусть Γ- множество элементов,

$P(\Gamma)$–множество всех подмножеств Γ,
$\pi: P(\Gamma) \to [0,1]$ – мера возможности.

Возможностной величиной (переменной) называется функция $Z: \Gamma \to E^1$. Функция $\mu_Z: E^1 \to [0,1]$ называется распределением возможностной величины Z и определяется следующим образом:

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma | Z(\gamma) = z\}, \forall z \in E^1.$$

Нечёткая переменная (С.Намиас)

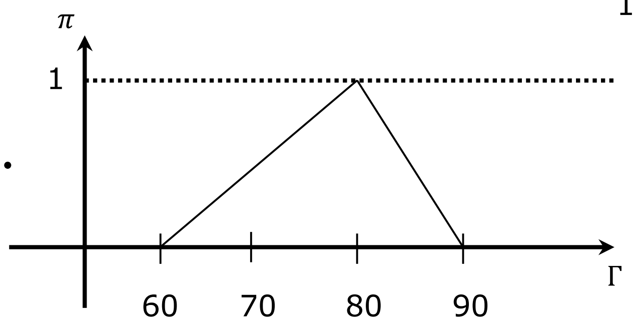
Есть кастрюля с горячей водой. Насколько надо нагреть, чтобы вода закипела?

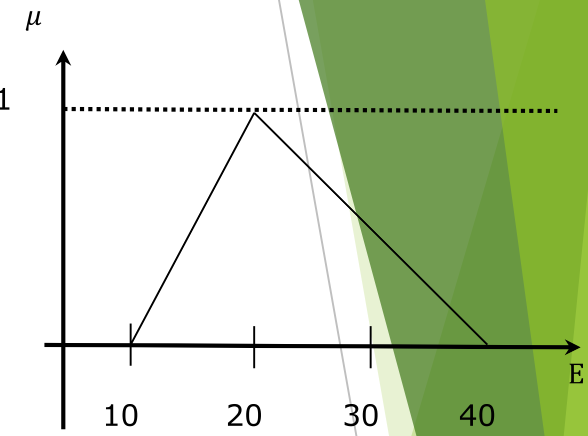
Γ – температуры воды.

π – «горячая».

z – температура нагрева.

$Z(\gamma) = 100 - \gamma$.





- $\mu(0)$=?

  $100 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 100,\ \pi\{100\} = 0 \to \mu(0)=0;$

- $\mu(15)$=?

  $100 - 85 = 15, \quad \pi\{85\} = 0.5 \to \mu(15) = 0.5;$

- $\mu(20)$=?

  $100 - 80 = 20, \quad \pi\{80\} = 1 \to \mu(20) = 1;$

- $\mu(30)$=? $100 - 70 = 30,\ \pi\{70\} = 0.5 \to \mu(30) = 0.5;$

- $\mu(40)$=? $100 - 60 = 40,\ \pi\{60\} = 0 \to \mu(40) = 0.$

Нечёткая составная переменная

Упорядоченный набор $X=(X_1,\ldots,X_n)$, где X_i – нечёткая переменная, называют **нечёткой составной переменной** на $U= U_1\times\ldots\times U_n$

R – n-арное нечёткое отношение в U, обусловленное переменной X.

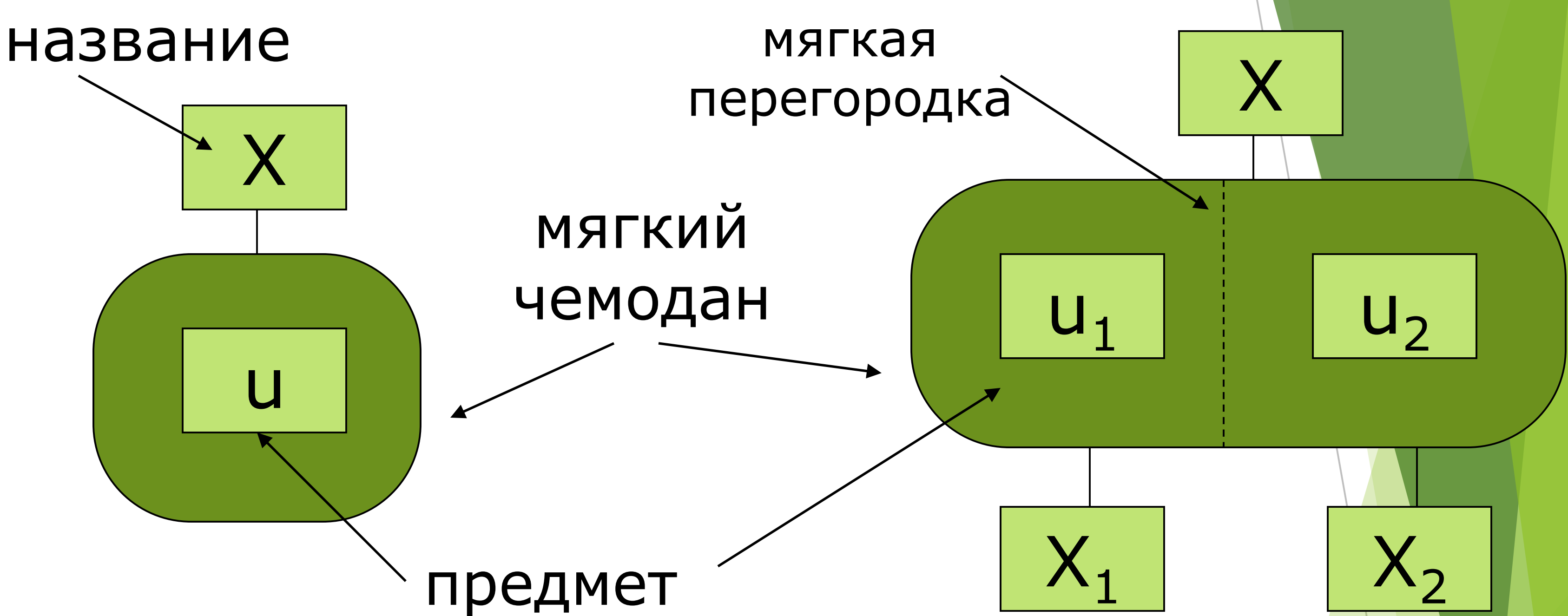
Уравнение назначения:

$$(x_1,\ldots,x_n)=(u_1,\ldots,u_n):R(X_1,\ldots,X_n),$$

Совместимость значения:

$$c(u_1,\ldots,u_n)= \mu_{R(X)}(u_1,\ldots,u_n)$$

Нечёткая переменная - аналогия



u	C(u)
Стул	0
Пальто	0.8
Рубашка	1
Туфли	0.9

u_1	u_2	$C(u_1, u_2)$
Пальто	Туфли	0.8
Пальто	Рубашка	1
Пальто	Пальто	0.6

Маргинальные нечёткие ограничения

Пусть
$q=i_1,\ldots,i_l$ – набор индексов
$q'=j_1,\ldots,j_m$ – дополнение этого набора

$u_{(q)}= (u_{i1},\ldots,u_{il})$, $u_{(q')}= (u_{j1},\ldots,u_{jm})$

Маргинальное ограничение
$R(X_{(q)})=R(X_{i1},\ldots,X_{il})$ -это проекция $R(X_1,\ldots,X_n)$ на $U_{i1} \times \ldots \times U_{il}$

$$\mu_{R(X_{(q)})}(u_{(q)}) = \underset{u_{(q')}}{\circ^{S}} \mu_{R(X)}(u)$$

Условные нечёткие ограничения

Пусть

$q=i_1,\ldots,i_l$ – набор индексов

$q'=j_1,\ldots,j_m$ – дополнение этого набора

$u_{(q)}=(u_{i1},\ldots,u_{il})$, $u_{(q')}=(u_{j1},\ldots,u_{jm})$

$u^0_{(q)}=u^0_{i1},\ldots,u^0_{il}$ – значения переменных $u_{i1},\ldots,u_{il}$

Тогда если в функции R(X) положить значения переменных $u_{(q)}$ равными $u^0_{(q)}$, то полученную функцию переменных $u_{(q')}$, называют **условным ограничением** $R(X_{(q')}|u^0_{(q)})$

$$\mu_{R(X_{(q')}|u^0_{(q)})}(u_{(q')})=\mu_{R(X)}(u_1,\ldots,u_n\,|\,u_{i_1}=u^o_{i_1},\ldots,u_{i_l}=u^o_{i_l})$$

Взаимодействующие нечёткие переменные

Нечёткое ограничение $R(X_1,\dots,X_n)$ называют **сепарабельным** тогда и только тогда когда его можно представить в виде декартова произведения унарных ограничений:

$$R(X_1,\dots,X_n)=R(X_1) \times \dots \times R(X_n).$$

Предложение:
Если $R(X_1,\dots,X_n)$ сепарабельно, то сепарабельно и любое индуцированное им маргинальное ограничение.

Переменные $X_1,\dots,X_n$ называют **невзаимодействующими**, тогда и только тогда, когда ограничение R сепарабельно.

Лингвистическая переменная

Лингвистическая переменная - это набор ($\mathcal{X}$,T($\mathcal{X}$),U,G,M), где
$\mathcal{X}$ – название переменной;
T($\mathcal{X}$) – терм-множество переменной;
U – универсальное множество;
u – общее название элементов U;
G – синтаксическое правило, порождающее значения X переменной $\mathcal{X}$;
M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому значению X его смысл M(X), т.е. нечёткое подмножество множества U.

Конкретное значение X, порожденное G, называют **термом**.

Лингвистическая переменная - возраст

Пример:
$\mathcal{X}$ – возраст
U = [0,…,100]

Атомарные термы: старый, молодой, очень,…
Составные термы: очень старый, более или менее молодой,…

T(возраст)=молодой + старый + не старый + более или менее молодой + очень-очень старый + …

$$\mu_{старый}(u) = \int_{50}^{100} (1 + (\frac{u-50}{5})^{-2})^{-1} / u$$

$$\mu_{очень\,старый}(u) = \int_{50}^{100} (1 + (\frac{u-50}{5})^{-2})^{-2} / u$$

Лингвистическая переменная – уравнение назначения

X = T($\mathcal{X}$) = название, порождённое G

Смысл X:

M(X)=R(терм из T($\mathcal{X}$))

Пример:

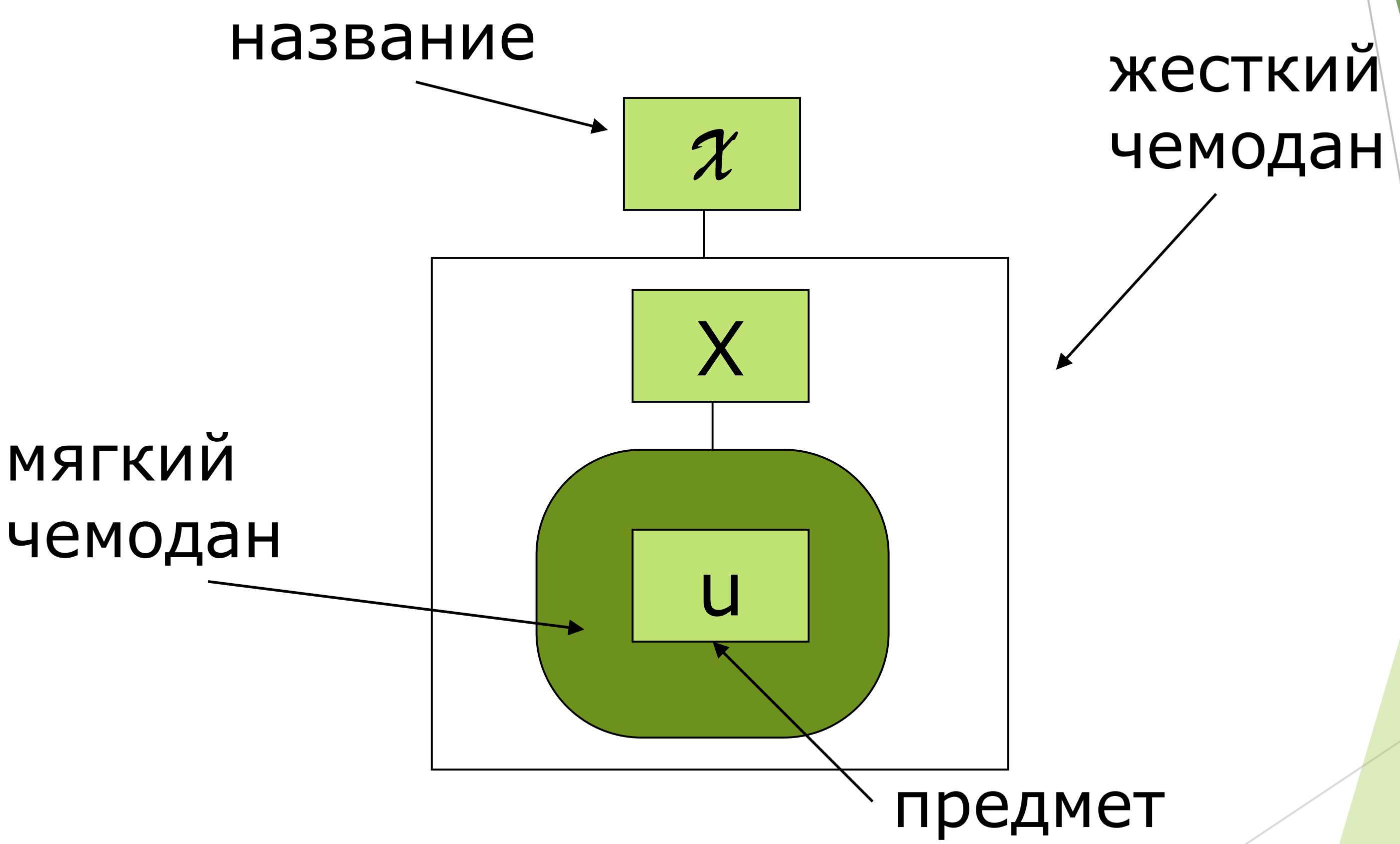
$\mathcal{X}$ - возраст, старый – терм из T($\mathcal{X}$)

Уравнение

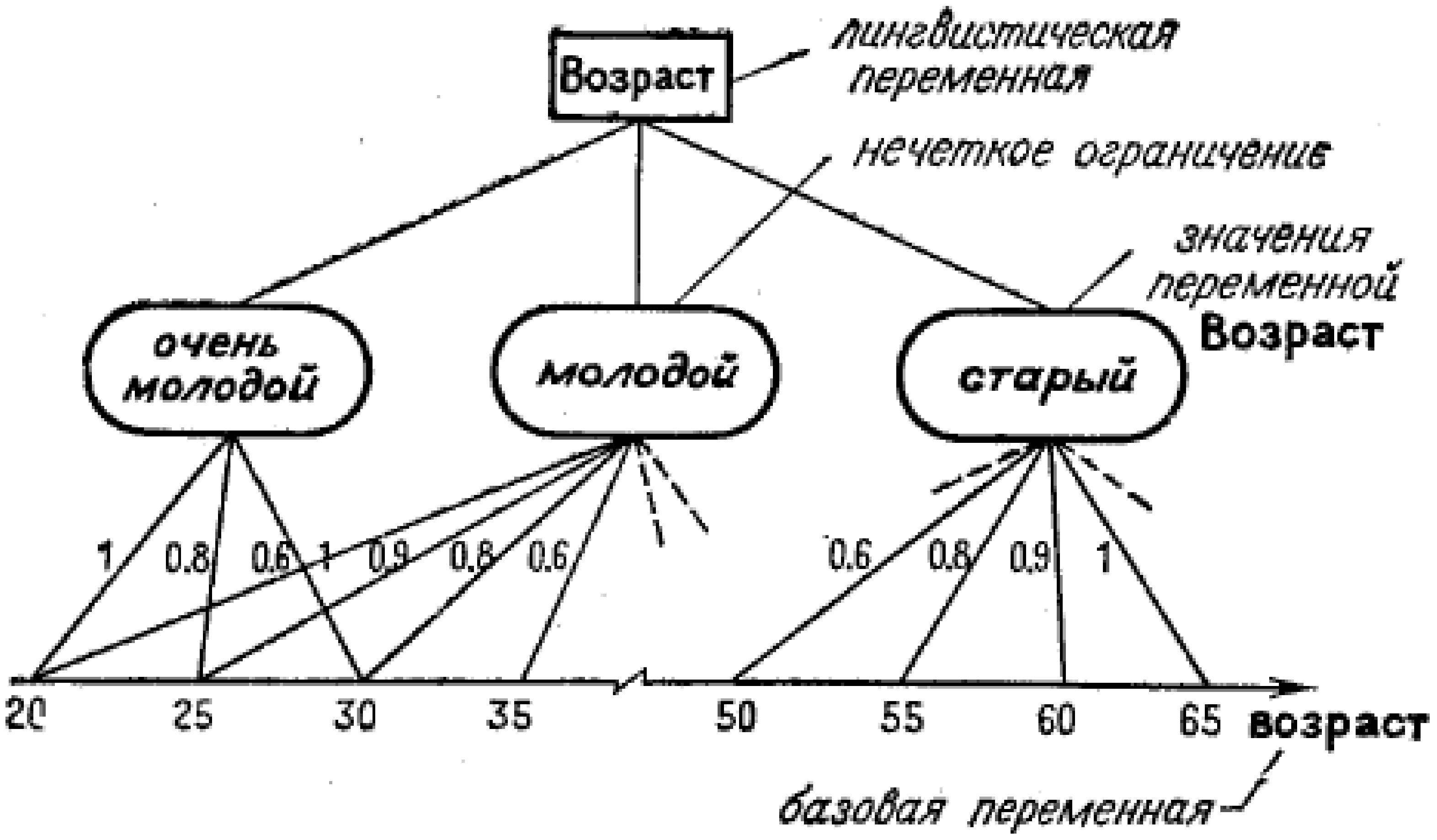
возраст=старый

понимается как *нечёткое ограничение на значения базовой переменной u*.

Лингвистическая переменная – аналогия



Лингвистическая переменная – структура



Структурированная лингвистическая переменная

Лингвистическая переменная называется **структурированной**, если её терм-множество T($\mathcal{X}$) и функцию M можно задать алгоритмически.

Пример:

$\mathcal{X}$ – возраст

U = [0,…,100]

T::=старый

T::=очень T

M: $\mu_{очень \ldots очень\ старый}(u) = \int\limits_{50}^{100} (1 + (\frac{u-50}{5})^{-2})^{-2n} / u$

Булева лингвистическая переменная

Булевой лингвистической переменной называется такая лингвистическая переменная X, термы которой являются булевыми выражениями вида <X_p, hX_p, [X или hX]>где:
h – лингвистическая неопределённость;
X_p- первичный терм;
hX_p- название нечёткого множества, являющегося результатом действия h на X_p.

Примеры:

M(не молодой)=$\neg$молодой

M(не очень молодой)=$\neg$молодой^2

M(не очень молодой или старый)=

$\neg$молодой^2$\cup$старый

Представление неопределённостей

недавно=1/2016+0.8/2015+0.7/2014

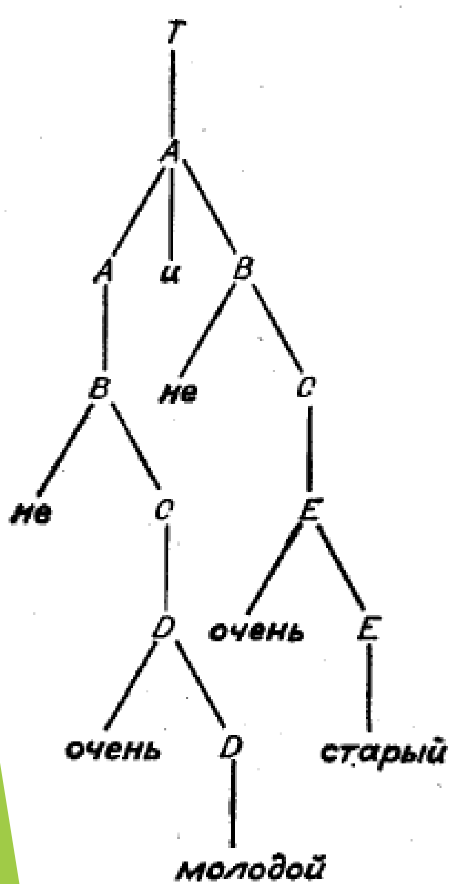
Если «**более или менее**» моделировать растяжением:

более или менее недавно = (недавно)$^{1/2}$=
=1/2016+0.9/2015+0.84/2014

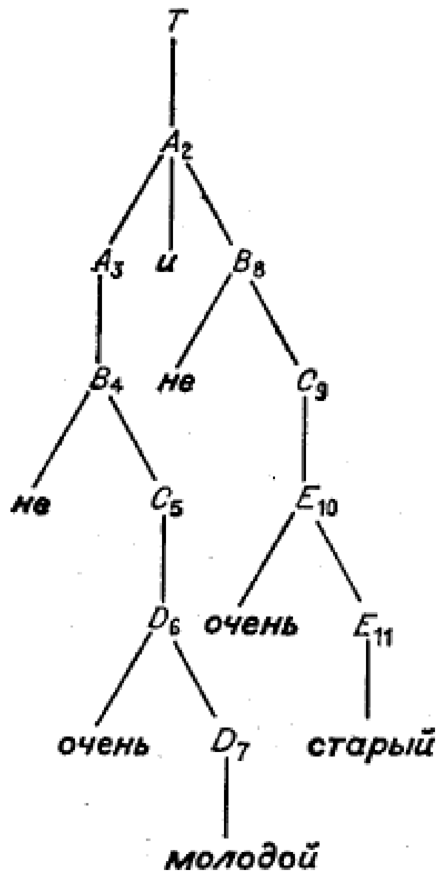
Если «**более или менее**» моделировать оператором увеличения нечёткости:

более или менее недавно =
=1/2016+0.9/2015+0.7/2014+0.56/2013

Вычисление смысла



Синтаксическое дерево значения «не очень молодой и не очень старый»



Вычисление смысла значения «не очень молодой и не очень старый»

D_7=молодой

E_{11}=старый

$D_6 = D_7{}^2$=молодой^2

$E_{10}=E_{11}{}^2$=старый^2

$C_5=D_6$=молодой^2

$C_9=E_{10}$=старый^2,

$B_4{}^{=}\neg C_5=\neg$(молодой^2),

$B_8=\neg C_9=\neg$(старый^2),

$A_3=B_4{}^{=}\neg$(молодой^2),

$A_2=A_8 \cap B_8=$

$=\neg$(молодой^2)$\cap\neg$(старый^2)

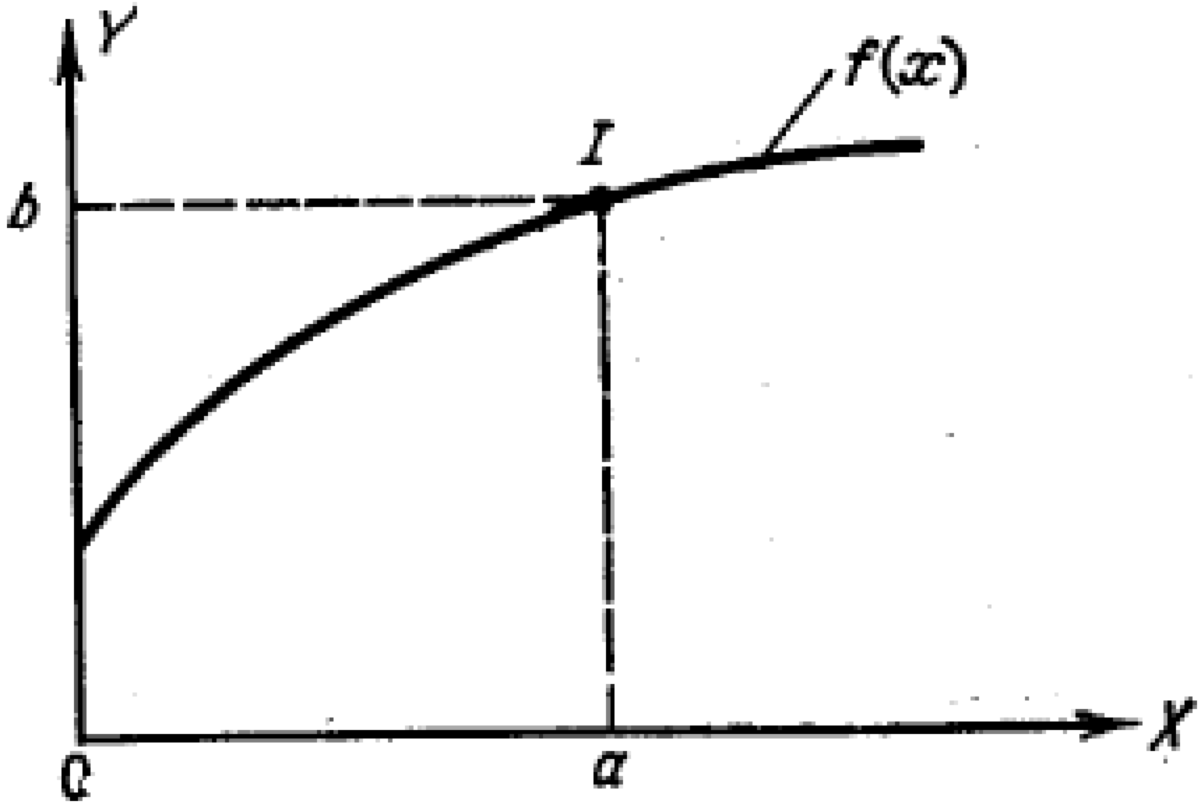
не очень молодой и не очень старый=

$=\neg$(молодой^2)$\cap\neg$(старый^2)

Композиционное правило вывода

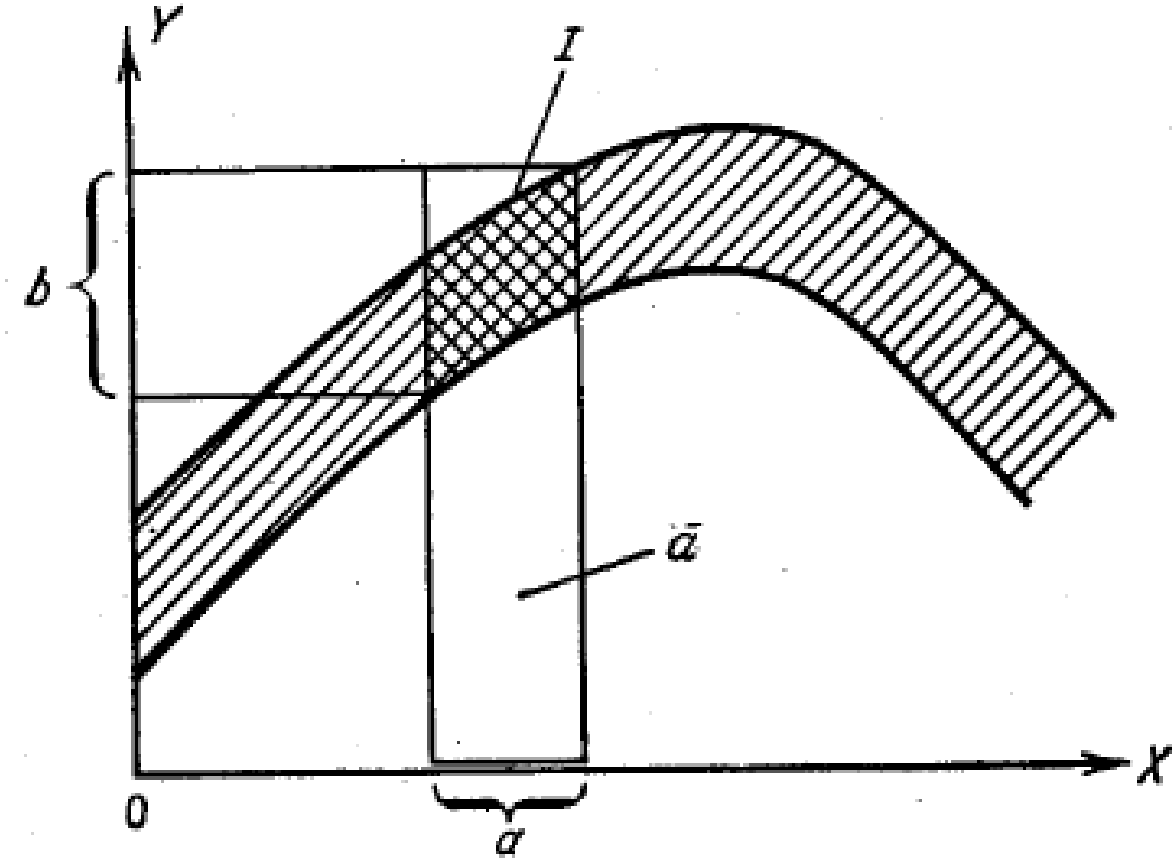
Правило вывода (modus ponens)

A – истинно, A->B => B – истинно



Вывод y=b из предпосылок x=a и y=f(x)

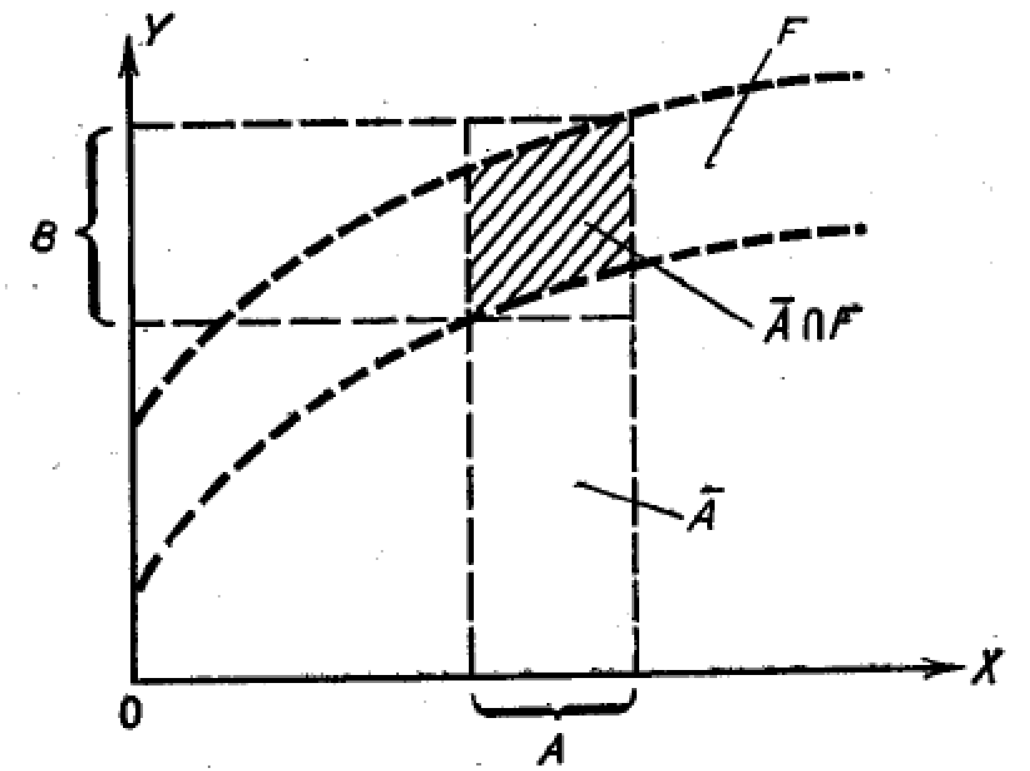
Правило вывода



Композиционное правило вывода в случае переменных со значениями-интервалами

Правило вывода

Пусть A – нечёткое подмножество 0X,
F – нечёткое отношение в 0X×0Y



$$\mu_B(y) = \circ^S\left(\mu_A(x) \circ^T \mu_F(x,y)\right)$$

Правило вывода

Пусть U,V – два универсальных базовых множества с переменными u и v соответственно, R(u), R(v), R(u,v) – нечёткие отношения, A и F - нечёткие подмножества U и $U \times V$.

Тогда **композиционное правило вывода** утверждает, что решение уравнений назначения

$$R(u)=A$$
$$R(u,v)=F$$

имеет вид

$$R(v)=A \circ F$$

Правило вывода - пример

u – малый	*предпосылка*
u и v – примерно равны	*предпосылка*
----------	
v – более или менее малый	*вывод*

$$U = V = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$A = \textit{малый} = 1/1 + 0.6/2 + 0.2/3$$

$$F = \textit{примерно равны} = 1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3) + 1/(4,4) +$$
$$+ 0.5/((1,2) + (2,1) + (2,3) + (3,2) + (3,4) + (4,3)).$$

$$R(v) = \textit{малый} \circ \textit{примерно равны} = [1 \quad 0.6 \quad 0.2 \quad 0] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [(1 \circ^T 1) \circ^S (0.6 \circ^T 0.5) \quad (1 \circ^T 0.5) \circ^S (0.6 \circ^T 1) \circ^S (0.2 \circ^T 0.5) \quad (0.6 \circ^T 0.5) \circ^S (0.2 \circ^T 1) \quad (0.2 \circ^T 0.5)] =$$
$$= [1 \quad 0.6 \quad 0.5 \quad 0.2] \approx \textit{более или менее малый}$$

Нечёткая импликация

Пусть U, V – универсальные множества, A, B, C – нечёткие множества в U, V и V.

Высказывание ЕСЛИ A ТО B ИНАЧЕ C есть бинарное нечёткое отношение в $U \times V$ определённое как $(A \times B) \vee (\neg A \times C)$

Высказывание ЕСЛИ A ТО B можно рассматривать, как ЕСЛИ A ТО B ИНАЧЕ C при допущении, что $C = V$:

$$(A \times B) \vee (\neg A \times V)$$

Нечёткая импликация - пример

$$U = V = 1 + 2 + 3$$

$$A = малый = 1/1 + 0.4/2$$

$$B = большой = 0.4/2 + 1/3$$

$$C = не\ большой = 1/1 + 0.6/2$$

$$Если\ A\ то\ B\ иначе\ C = (1/1 + 0.4/2) \times (0.4/2 + 1/3) \vee (0.6/2 + 1/3) \times (1/1 + 0.6/2) =$$

$$= 0.4/(1,2) + 1/(1,3) + 0.6/(2,1) + 0.36/(2.2) + 0.4/(2,3) + 1/(3,1) + 0.6/(3,2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.36 & 0.4 \\ 1 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Если\ A\ то\ B = (1/1 + 0.4/2) \times (0.4/2 + 1/3) \vee (0.6/2 + 1/3) \times (1/1 + 1/2 + 1/3) =$$

$$= 0.4/(1,2) + 1/(1,3) + 0.6/(2,1) + 0.6/(2.2) + 0.6/(2,3) + 1/(3,1) + 1/(3,2) + 1/(3,3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Modus ponens

Пусть U, V – универсальные множества, A_1, A_2, B – нечёткие множества в U, U и V. Пусть A_1 назначено ограничению R(u), а значение $A_2 \Rightarrow B$ – ограничению R(u,v), т.е.

$$R(u) = A_1$$

$$R(u,v) = A_2 \Rightarrow B$$

Тогда решение

$$R(v) = A_1 \circ (A_2 \Rightarrow B)$$

- есть обобщенная форма правила modus ponens.

Modus ponens - пример

u – более или менее малый — *предпосылка*
Если u - малый, то v – большой — *импликация*
----
v – более или менее большой — *приближенный вывод*

$$U = V = 1 + 2 + 3$$

$$A_2 = \text{малый} = 1/1 + 0.4/2$$

$$A_1 = \text{более или менее малый} = 1/1 + 0.4/2 + 0.2/3$$

$$B = \text{большой} = 0.4/2 + 1/3$$

$$\text{малый} \Rightarrow \text{большой} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{более или менее малый} \circ (\text{малый} \Rightarrow \text{большой}) = [1 \quad 0.4 \quad 0.2] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.4 \quad 0.4 \quad 1] \approx \text{более или менее большой}$$

Другие подходы к определению нечёткой импликации

Импликация Мамдани

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$$

Импликация Ларсена

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$$

Импликация Лукашевича

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$$

Бинарная импликация

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\max\{1-\mu_A(x),\mu_B(y)\}$$

Импликация Гогуэна

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\min\{1,\mu_B(x)/\mu_A(y)\}$$

Импликация Шарпа

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\begin{cases}1, & \mu_A(x)\le\mu_B(y)\\ 0, & \mu_A(x)>\mu_B(y)\end{cases}$$

Импликация Гёделя

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\begin{cases}1, & \mu_A(x)\le\mu_B(y)\\ \mu_B(y), & \mu_A(x)>\mu_B(y)\end{cases}$$

Вероятностная импликация

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)\}$$

Импликация ограниченной суммы

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)=\min\{1,[\mu_A(x)+\mu_B(y)]\}$$

Задача 1 - Правило вывода

u – большой *предпосылка*
u и v – примерно равны *предпосылка*
----
v - ? *вывод*

$$U = V = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$A = \textit{большой} = 0.2/2 + 0.8/3 + 1/4$$

$$F = \textit{примерно равны} = 1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3) + 1/(4,4) +$$
$$+ 0.5/((1,2) + (2,1) + (2,3) + (3,2) + (3,4) + (4,3)).$$

$$R(v) = ?$$

Композиционное правило вывода:
Из $R(u) = A$ и $R(u, v) = F$
следует $R(v) = A \circ F$

Комбинация:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \{\mu_R(x, y) \circ^T \mu_S(y, z)\}$$

Задача 2 - Нечёткая импликация

$$U = V = 1 + 2 + 3$$

$$A = большой = 0.4/2 + 1/3$$

$$B = малый = 1/1 + 0.4/2$$

$$C = не\ малый = 0.6/2 + 1/3$$

$$Если\ A\ то\ B\ иначе\ C = ?$$

$$Если\ A\ то\ B = ?$$

Импликация:

ЕСЛИ A ТО B ИНАЧЕ C

$(A \times B) \vee (\neg A \times C)$

Задача 3 – Modus ponens

u – не очень большой *предпосылка*
Если u - малый, то v – не большой *импликация*

$$U = V = 1 + 2 + 3$$

$$A = большой = 0.4/2 + 1/3$$

$$B = малый = 1/1 + 0.4/2$$

$$очень = (\cdots)^2$$

$$\circ^T = \min$$

$$\circ^S = \max$$

$$R(v) = ?$$

Modus ponens:

$R(u) = A_1$
$R(u, v) = A_2 \Rightarrow B$

$R(v) = A_1 \circ (A_2 \Rightarrow B)$

Импликация:

ЕСЛИ A ТО B
$(A \times B) \vee (\neg A \times V)$